Conteúdo

CONJUNTOS NUMÉRICOS ... 4
1. Conjuntos dos Números Naturais. (IN) ... 4
IN = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...} ... 4
A = {0, 1, 2, 3, 4} ... 4
2. Conjuntos dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) ... 5
3. Conjunto Universo. ... 5
4. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$) ... 5
5. Conjunto dos Números Irracionais (II). ... 5
6. Conjunto dos números Reais (IR). ... 5
TRANSFORMAÇÃO DE PERCENTUAIS EM NÚMEROS ... 7
FRACIONÁRIOS E DECIMAIS ... 7
PROPORÇÃO, REGRA DE TRÊS "SIMPLES E COMPOSTA" ... 8
Série de Razões Iguais ... 9
Grandezas proporcionais ... 10
Regra de Três Simples ... 11
Regra de três composta. ... 12
Porcentagem ... 13
Relações e Funções ... 16
1. Definições. ... 16
2. RELAÇÕES: - ... 19
FUNÇÃO ... 20
1 - Definição: ... 20
DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM ... 20
ESTUDO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO ... 21
2 - TIPOS DE FUNÇÕES ... 24
3 - RELAÇÕES ENTRE O NÚMERO DE ELEMENTOS DO DOMÍNIO E DO CONTRADOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO ... 24
4 - PARIDADE DAS FUNÇÕES ... 24
5 - FUNÇÃO INVERSA ... 25
6 - FUNÇÃO COMPOSTA ... 25
7 – FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE ... 26
8 – TIPOS PARTICULARES DE FUNÇÕES ... 27
FUNÇÃO CONSTANTE ... 27
FUNÇÃO DO 1º GRAU ... 27
FUNÇÃO DO 2º GRAU ... 28
O Gráfico da função do 2º grau ... 28
EXPONENCIAIS E LOGARITMOS ... 33
Exponenciais ... 34
POTENCIAÇÃO ... 34
EXERCÍCIO BÁSICO ... 34
EQUAÇÕES EXPONENCIAIS ... 35

FUNÇÃO EXPONENCIAL ... 36
FUNÇÃO EXPONENCIAL GERAL ... 36
Variação: ... 37
Logaritmos ... 39
Definição ... 39
Propriedades dos logaritmos ... 40
Exercícios de fixação ... 40
Função Logaritmica ... 42
Variação da função ... 42
INTERCEPTOS ... 42
ASSÍNTOTA ... 42
Exercícios propostos ... 44
LIMITES ... 44
NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE ... 44
PROPRIEDADE DOS LIMITES ... 46
LIMITES LATERAIS ... 47
CONTINUIDADE ... 48
Propriedades das funções contínuas ... 48
ALGUNS LIMITES ENVOLVENDO INFINITO ... 49
LIMITE DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL PARA X $\to \pm\infty$ ... 49
BIBLIOGRAFIA ... 51

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Conjuntos dos Números Naturais. (IN)

IN = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...}

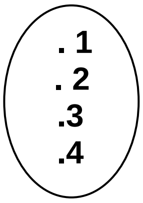
Trata-se de um conjunto infinito, portanto, é impossível nomear todos os seus elementos.

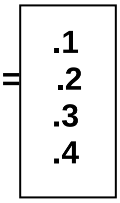
Tipos de representação:

a) Diagrama de Venn.

→ Os elementos do conjunto aparecem contidos numa figura fechada.

Ex.

A = 

B = 

b) Enumeração.

→ Quando os elementos do conjunto aparecem escritos explicitamente entre chaves.

Ex:

A = {0, 1, 2, 3, 4}

c) Compreensão.

→ Quando os elementos do conjunto são expressos por uma propriedade que os caracterizam.

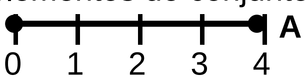
Ex:

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{N} \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{4}\}$$

B = {x|x é cor da bandeira nacional}

d) Reta.

→ Os elementos do conjunto são representados numa reta.

EX: 

2. Conjuntos dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

2.1. Subconjunto

→ Dados dois conjuntos A e B, dizemos que *A está contido em B* ou que *A é subconjunto de B* se, e somente se, todo elemento do conjunto A também é elemento do conjunto B.

Se A é subconjunto de B, então $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

Então, podemos concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, pois **IN** é subconjunto de $\mathbb{Z}$.

2.2. Igualdade de conjuntos.

→Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, todo elemento pertencente ao conjunto A também pertencer ao conjunto B.

Observação:

Se **A = B**, então $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

3. Conjunto Universo.

→ Para resolver uma equação ou um problema, ou desenvolver um determinado tema em Matemática, devemos retirar os elementos de que necessitamos de um conjunto que os contenha. Esse conjunto recebe o nome de *conjunto universo* **e é representado pela letra U.**

4. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

→ O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, com denominador não nulo.

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\}$$

5. Conjunto dos Números Irracionais (II).

→ O conjunto dos números irracionais é formado por todos os números que não podem ser escritos na forma de fração.

6. Conjunto dos números Reais (IR).

→ O conjunto dos números reais é formado pelos números racionais e irracionais.

Podemos concluir que todos os números racionais pertencem ao conjunto dos números reais, porém nem todo número real é racional, pois existem números racionais que não podem ser escritos na forma de fração.

Então,

$$\mathbb{Q} \cup C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

1. Numa pesquisa efetuada no curso de Administração, constatou-se que: 93 alunos gostam de Matemática; 109 alunos gostam de T.G.A. (Teoria Geral da Administração); 147 alunos gostam de Psicologia; 43 alunos têm preferência por Matemática e T.G.A.; 46 por Matemática e Psicologia; 40 por T.G.A e Psicologia; 25 gostam das três disciplinas e 15 alunos não gostam de nenhuma das três. Pede-se:
a) Quantos alunos foram pesquisados.
b) Quantos têm preferência por duas disciplinas.
c) Quantos têm preferência só por Matemática e T.G.A.
d) Quantos têm preferência só por duas disciplinas.
e) Quantos preferem Matemática ou T.G.A.

2. Numa academia com 496 alunos, 210 fazem natação, 260 fazem musculação e 94 não fazem natação nem musculação. Determine o número de alunos que fazem:
a) Natação ou musculação.
b) Natação e musculação.
c) Natação e não fazem musculação.

3. Uma pesquisa de mercado sobre o consumo de três marcas A, B, e C de um determinado produto apresentou os seguintes resultados:
- A: 48%
- B: 45%
- C: 50%
- A e B: 18%
- A e C: 25%
- B e C; 15
- Nenhuma das três marcas: 5%.

Pede-se:
a) Qual é a porcentagem dos entrevistados que consomem uma e apenas uma das três marcas?
b) Qual a porcentagem dos entrevistados que consomem apenas duas marcas?

4. Uma pesquisa sobre a preferência dos consumidores revelou que, dos 350 entrevistados: 197 preferem o televisor x; 183 preferem o televisor y; 210 preferem o televisor z; 20 não tem preferência por nenhuma das três categorias; 85 preferem tanto x como y; 92 preferem tanto x como z; 103 preferem tanto y como z. Pede-se:

a. Quantos consumidores preferem as três categorias?
b. Quantos preferem somente uma das categorias?

5. Numa sociedade existem:

- 35 homens;
- 18 pessoas que usam óculos;
- 15 mulheres que não usam óculos;
- 7 homens que usam óculos.

Pede-se:

a) Qual o número de pessoas que compõem a sociedade?
b) Quantas pessoas são homens ou quantas usam óculos?

6. Qual a fração geratriz de:

a) 0,33333...

Resolução:

$$0{,}333\overline{3} = x \therefore multiplica\text{–}se\ por\ (10)\, e\, (-1)$$

$$\begin{cases} 3{,}33\overline{3} = 10x \\ -0{,}33\overline{3} = -x \end{cases}$$

$$3 = 9x$$

$$x = \frac{\cancel{3}}{\cancel{9}} = \frac{1}{3}$$

b) 0,272727...
c) 0,125
d) 0,055
e) $\mathbf{1{,}3636\overline{36}}$
f) $\mathbf{0{,}123\overline{123}}$

TRANSFORMAÇÃO DE PERCENTUAIS EM NÚMEROS FRACIONÁRIOS E DECIMAIS

Para realizar operações com percentuais é necessário transformá-los antes em frações ou números decimais.

$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15 \rightarrow$ o número que antecede o sinal de porcentagem é transformado em fração, cujo denominador é sempre 100. Para transformar o número fracionário em decimal, basta dividir i numerador da fração pelo seu denominador.

$1{,}2\% = \frac{1{,}2}{100} = 0{,}012 \rightarrow$ se o numerador contiver uma parte inteira e uma parte decimal, ambas devem ser representadas no numerador da fração. Depois, basta dividir o numerador pelo denominador, para obter o número expresso em forma decimal.

PROPORÇÃO, REGRA DE TRÊS "SIMPLES E COMPOSTA"

A indicação da divisão do numerador pelo denominador de uma fração é, às vezes, chamada de razão.

Exemplo: 2/4

A igualdade entre duas razões forma uma proporção. Exemplo: $\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$, são duas frações equivalentes e esta proporção também pode ser representada como segue:

$$\underbrace{2 \div \overbrace{4 = 4}^{\text{meios}} \div 8}_{\text{extremos}}$$

Propriedade Fundamental

Numa proporção do tipo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, o produto dos termos extremos é sempre igual ao produto do termos meios, ou seja:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c}$$

Conhecendo três elementos de uma proporção, é possível calcular o valor do quarto elemento, também chamado de Quarta proporcional.

Exemplo: $\frac{2}{4}=\frac{4}{x} \Rightarrow 2x = 4.4 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{2} \Rightarrow x = 8$

Propriedade da soma

Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou segundo), assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).

Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, então:

$$\boxed{\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \text{ ou } \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}}$$

Propriedade da diferença

Numa proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou segundo), assim como a diferença dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).

Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, então:

$$\boxed{\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c} \text{ ou } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$$

Exercícios:

1. Calcular x e y na proporção $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, sabendo que x + y = 35. (15,20)
2. Calcular x e y na proporção $\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$, sabendo que x – y = 30. (120,90)
3. Um pai dividiu R$ 45,00 entre dois filhos na razão de 2 para 3. Quanto recebeu cada filho? Resp. R$ 18,00 e R$ 27,00
4. Dois irmãos têm juntos 80 anos. Se a razão entre essas idades é 3/2, calcule a idade do irmão mais velho. Resp. 48 anos
5. A diferença entre os preços de dois objetos é R$ 90,00 e a razão desses preços é 3/2. Calcule o preço de cada um. Resp. R$ 270,00 e R$ 180,00

Série de Razões Iguais

Em uma série de razões iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos conseqüentes assim como qualquer antecedente está para o seu respectivo conseqüente.

Exemplo:

$$\frac{a+c+e+....+m}{b+d+f+....+n}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}+....\frac{m}{n}$$

Exercícios:

1. Calcule x, y e z, sabendo que $\frac{x}{9}=\frac{y}{11}=\frac{z}{15}$ e x + y + z = 420. (108,132,180)
2. Calcule a, b e c, sabendo que $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=\frac{c}{1}$ e a + b + c = 180. (100,60,20)
3. Dois amigos jogaram na loteria esportiva, sendo que o primeiro entrou com R$140,00 e o segundo com R$ 220,00. Ganharam um prêmio de R$ 162.000,00. Como deve ser rateado o prêmio? (R$ 63.000,00 e R$ 99.000,00)

Grandezas proporcionais

A relação entre duas grandezas variáveis estabelece a lei de variação dos valores de uma delas em relação à outra. Segundo tal lei, as grandezas relacionadas podem ser direta ou indiretamente proporcionais.

1. Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas variáveis são diretamente proporcionais se os valores correspondentes a x e y são expressos por uma função do tipo y = k.x, onde k é um número real constante e diferente de zero.

(A medida em que aumentamos o valor de x também aumenta o valor de y ou a medida em diminuímos o valor de x também diminui o valor de y).

2. Grandezas Inversamente proporcionais

Duas grandezas variáveis são inversamente proporcionais se os valores correspondentes a x e y são expressos por uma função do tipo $y = k.\frac{1}{x}$, onde k é um número real constante e diferente de zero.

(A medida em que aumentamos o valor de x, diminui o valor de y ou a medida em diminuímos o valor de x, aumenta o valor de y).

Números inversamente proporcionais

As seqüências de números reais e não nulos (a,c,e,....m) e (b,d,f,....n) são inversamente proporcionais se, e somente se,:

a.b = c.d = e.f = ...= m.n = k (Constante)

Exercícios:

1. O número de dias gastos na execução de uma obra é direta ou inversamente proporcional ao número de máquinas empregadas na obra? Por quê?

2. Verifique se são ou não inversamente proporcionais às seqüências de números:

a) (2, 3, 6,10) e (45, 30, 15, 9)
b) (2, 5, 8) e (40, 30, 20)

3. Determine os valores de a e b nas seqüências de números inversamente proporcionais (2, 3, b) e (15, a, 5). Resp. (10,6)

4. O número de horas gastos para realizar uma viagem é direta ou inversamente proporcional a velocidade desenvolvida no trajeto? Por quê?

Regra de Três Simples

- Roteiro para resolução de problemas:

a) Colocar as grandezas de mesma espécie numa mesma coluna.
b) Indicar duas grandezas diretamente proporcionais com flechas no mesmo sentido.
c) Indicar duas grandezas inversamente proporcionais com flechas de sentido contrário.
d) Armar a proporção e resolvê-la.

Exercícios:

1. Com 8 eletricistas podemos fazer a instalação de uma casa em 3 dias. Quantos dias levarão 6 eletricistas para fazer o mesmo trabalho? Resp. 4 dias.

2. Uma fábrica engarrafa 3000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levará para engarrafar 4000 refrigerantes? Resp. 8 h.

3. Com 14 litros de tinta podemos pintar uma parede de 35 m². Quantos litros são necessários para pintar uma parede de 15 m²? Resp. 6 l.

4. Num livro de 270 páginas, há 40 linhas em cada página. Se houvesse 30 linhas, qual seria o número de páginas? Resp. 360 páginas.

Regra de três composta.

5. Numa fábrica 12 operários trabalhando 8 horas por dia conseguem fazer 864 caixas de papelão. Quantas caixas serão feitas por 15 operários que trabalhem 10 horas por dia? Resp. 1350 caixas.

6. Numa indústria têxtil, 8 alfaiates fazem 360 camisas em 3 dias, Quantos alfaiates são necessários para que sejam feitas 1080 camisas em 12 dias? Resp. 6.

7. Uma família de 6 pessoas consome em 2 dias 3 kg de pão. Quantos quilos serão necessários para alimentá-la durante 5 dias estando ausentes 2 pessoas? Resp. 5.

8. Sabe-se que 4 máquinas, operando 4 horas por dia, durante 4 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidas por 6 máquinas daquele tipo, operando 6 horas/dia, durante 6 dias. Resp.13,5.

9. Para asfaltar 1 km de estrada, 30 homens gastaram 12 dias trabalhando 8 horas por dia . Quantos dias, vinte homens, trabalhando 12 horas por dia asfaltarão 2 km da mesma estrada? Resp. 24.

Exercícios Complementares:

1. Uma viagem foi feita em 12 dias percorrendo-se 150 km por dia. Quantos dias seriam empregados para fazer a mesma viagem percorrendo 200 km por dia?

2. Um trabalho é feito por 21 teares em 10 dias, trabalhando 5 horas por dia. Quantas horas por dia deverão trabalhar 15 teares durante 12 dias para fazer o mesmo trabalho?

3. Um batalhão de 1600 soldados tem viveres para 10 dias à razão de 3 refeições diárias para cada homem. No entanto juntaram-se a esse batalhão mais 400 soldados. Quantos dias durarão os víveres, se foi decidido agora que cada soldado fará 2 refeições por dia?

4. Dezoito operários, trabalhando 7 horas por dia durante 12 dias, conseguem realizar um determinado serviço. Trabalhando 9 horas por dia, 12 operários farão o mesmo serviço em quantos dias?

5. Oito operários levam 5 dias para levantar um muro de 6 m de altura e 35 m de comprimento. Quantos dias 15 operários levarão para construir um muro com 3 m de altura e 70 m de comprimento?

6. Em 3 dias foram construídos 2/10 do comprimento de uma estrada. Supondo que o trabalho continue a ser feito no mesmo ritmo, em quantos dias a estrada estará pronta?

7. Uma turma de operários realiza certa tarefa em 30 dias. Em quantos dias a mesma turma fará outro serviço, cuja dificuldade é estimada em 3/5 da dificuldade do primeiro?

8. A produção de uma tecelagem era de 8000 metros de tecido/dia, com os operários trabalhando 8 horas por dia. Com a admissão de mais 300 operários a indústria passou a produzir 14000 metros/dia, trabalhando 9 horas por dia. Qual era, então, o número de operários antes da admissão?

Porcentagem

Em nosso dia-a-dia é comum observarmos expressões como estas:

“ Desconto de até 30% na grande liquidação de verão”

“ Os jovens perfazem um total de 50% da população brasileira”

“ A inflação registrada em dezembro foi de 1,22%”

Todas essas expressões envolvem uma razão especial chamada **porcentagem,** que será o nosso objeto de estudo.

Taxa percentual

Suponhamos que um aluno tenha acertado, em um exame, 12 das 15 questões apresentadas. A razão entre o número de questões acertadas e o número total de questões, e o percentual de acertos é:

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{4.100}{5} \Rightarrow x = \frac{400}{5} \Rightarrow x = 80\%$$

Taxa é o valor que representa a quantidade de unidades tomadas em cada 100.

Porcentagem é o valor que representa a quantidade tomada de outra, proporcionalmente a uma taxa.

Principal (ou Capital quando este representa dinheiro) é o valor da grandeza da qual se calcula a percentagem

Problemas de percentagem

Representando

- o principal por **P** ou **C** quando se trata de valores monetários.
- A percentagem por **p.**
- A taxa por **r**;

Temos, genericamente:

$$\boxed{\frac{p}{P} = \frac{r}{100}}$$

Exemplo:

Em um colégio 26% dos alunos são meninas. Quantos alunos possui o colégio, se elas são em número de 182?

Resolução:

Temos: $\begin{cases} p = 182 \\ r = 26 \end{cases}$

Assim: $\frac{182}{P} = \frac{26}{100} \Rightarrow P = \frac{182x100}{26} = 700$,

Logo, o colégio possui 700 alunos.

Taxa unitária (i)

Taxa unitária é dada por $i = \frac{r}{100} = \frac{p}{P}$

Exemplo:

Um comerciante vendeu um objeto por R$ 540,00 com um lucro de 15% sobre esse valor. Quanto ganhou?

Temos:

P = 540

I = 15% = 0,15

Como; $\frac{p}{P} = i \Rightarrow p = Pi$

Logo, *p = 540. 0,15 = 81*

Então, o comerciante ganhou R$ 81,00.

Exercícios

1. R$ 6000,00 depositados numa caderneta de poupança renderam R$ 1500,00. Qual a porcentagem deste rendimento? Resp. 25%

2. Um comerciante vende uma mercadoria por um preço **"p"**. Querendo ser "esperto", ele aumentou o preço em 50% e anunciou que nas compras à vista, oferece um desconto de 50% sobre o preço final. Ele leva vantagem nessa transação?

3. Uma prestação de um apartamento é de R$ 850,00 e representa 30% do salário do comprador. Calcule quanto deve ser o salário total do comprador. Resp. R$ 2.833.33.

4. Um comerciante querendo ser vende uma mercadoria por um preço p. Querendo ser "esperto" ele aumentou o preço em 30% e anunciou que nas compras a vista, oferece um desconto de 30% sobre o preço final. Ele leva vantagem nesta transação?

Solução:
Preço inicial: p
Preço Final: p + 30%.p = p + 0,3.p = 1,3.p
Desconto sobre o preço final: 30% de (1,3.p) = 0,3 x 1.3p = 0,39p
Preço com desconto: 1,3p – 0,39p = 0,91p
Resposta: Não é uma transação vantajosa, pois quem compra a vista paga 0,91 ou 91% de p. Portanto o comerciante perde 9% do preço inicial p.

5. A prestação mensal de uma casa é de R$ 530,00 e representa 30% do salário do comprador. Calcule quanto deve ser o salário do comprador. Resposta: R$ 1.766,67

6. Uma máquina industrial foi vendida por R$ 135.000,00, com um lucro de 40% sobre o custo. Qual o valor do lucro? Resposta: R$ 38.571,43

7. O aluguel de um imóvel passou a ser de R$ 2.800,00, o que representou 250% de aumento sobre o aluguel anterior. Determinar o valor do aluguel antigo. Resposta: R$ 800,00

8. Certa mercadoria é vendida nas lojas A e B, sendo R$ 200,00 mais cara em B. Se a loja B oferecer um desconto de 20%, o preço seria igual ao da loja A. Qual é o preço na loja A? Resposta: R$ 800,00

9. Se o poder de compra de meu salário é hoje 20% daquele de um ano atrás. Qual deve ser o reajuste de meu salário para readquirir o poder de compra anterior? Resposta: 500%

10. Foi depositado numa caderneta de poupança R$ 6.000,00. Ao final de 30 dias houve um rendimento de R$ 150,00. Qual o valor da taxa de juros? Resposta: 2,5% a.m

Relações e Funções

1. Definições.

1.1 – ***Par ordenado: -*** é um par de números representado por (**a, b**) onde **a**, pertence a um conjunto e **b** pertence a outro conjunto. A ordem entre estes números ***a*** e ***b*** é estabelecida antecipadamente e **não pode ser mudada**, isto é, (***a,b***) e (***b,a***) são pares ordenados diferentes e representam “coisas” diferentes. Um par ordenado pode ser representado geometricamente por um ponto num plano. Neste caso, (***a,b***) e (***b,a***) são representados por pontos diferentes.

1.2 – ***Produto Cartesiano*** entre dois conjuntos ***A*** e ***B*** é uma operação entre estes conjuntos, indicada por ***A x B*** (lê-se “***A cartesiano B”***) ou ***B x A*** (lê-se ***“B cartesiano A”***). ***A x B*** e ***B x A*** também são conjuntos diferentes.
A x B é o conjunto de ***todos*** os pares ordenados (a,b) onde **a** $\in$ **A** e **b** $\in$**B**, ou seja, $AxB = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
B x A é o conjunto de ***todos*** os pares ordenados (a,b) onde **a** $\in$ **B** e **b** $\in$**A**, ou seja, $BxA = \{(b,a) \,/\, b \in B \wedge a \in A\}$

Exemplo;

Dados dois conjuntos A = {-1, 0, 1} e B = {0, 1, 2, 3}, determine A x B.

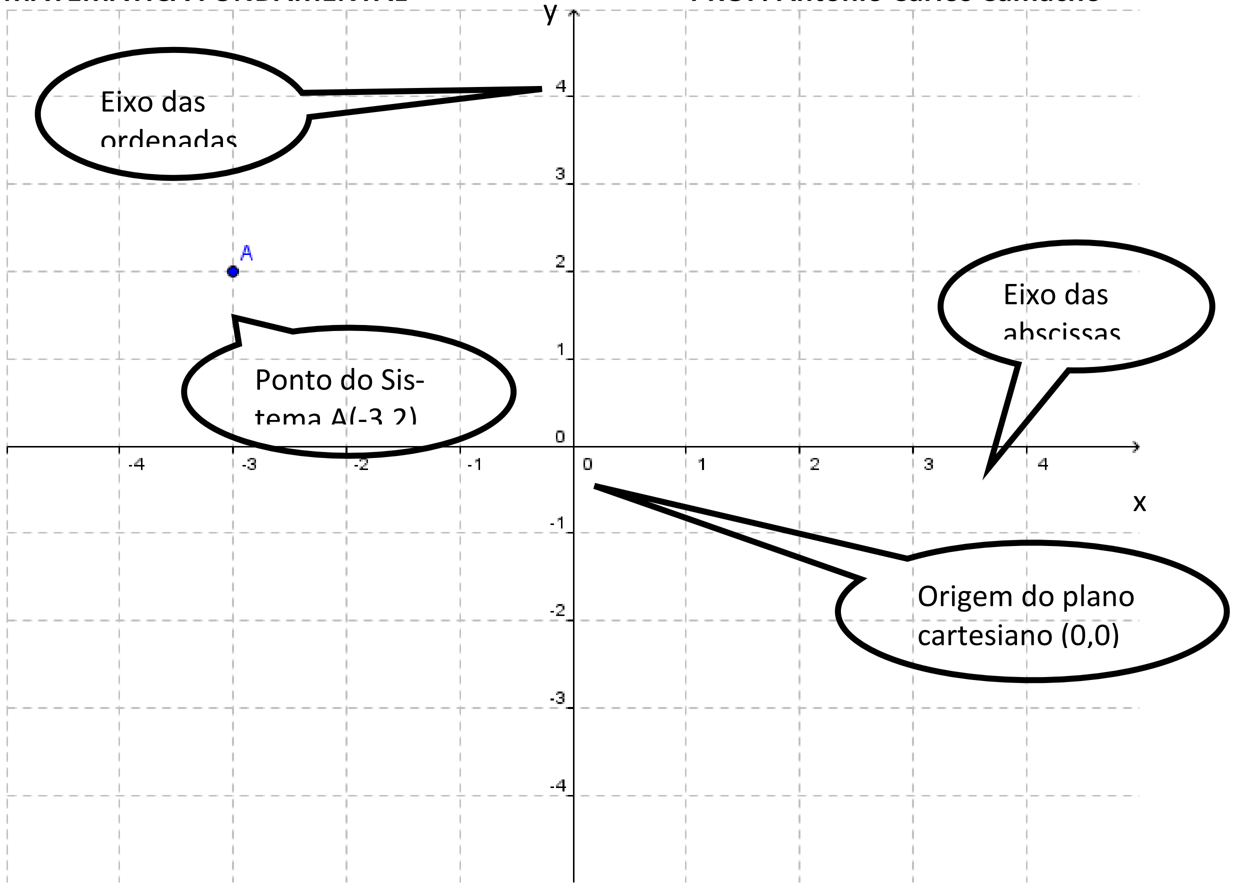
AxB={(-1,0); (-1,1);(-1,2); (-1,3); (0,1); (0,1); (0,2); (0,3); (1,0); (1,1); (1,2); (1,3)}

1.3 – ***Plano Cartesiano:-*** podemos representar o produto cartesiano entre dois conjuntos numéricos **A** e **B** geometricamente como um conjunto de pontos num plano. Cada par ordenado será representado por um ponto deste plano, chamado *plano cartesiano.*

O plano cartesiano é construído tomando-se duas retas reais perpendiculares entre si (formando 90°) que se encontram em suas origens (lembre-se que origem é o ponto associado ao zero).

Estas duas retas recebem o nome de ***Sistema de Coordenadas Cartesianas***. Cada eixo (reta real) representa um dos conjuntos do produto cartesiano.

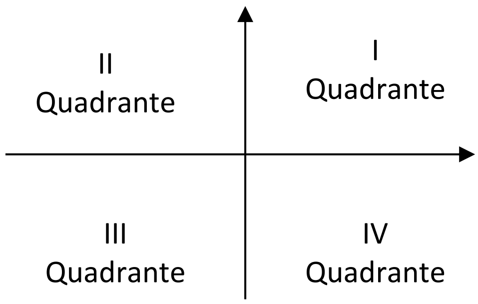
Veja abaixo:



Estas duas retas recebem o nome de ***Sistema de Coordenadas Cartesianas***. Cada eixo (reta real) representa um dos conjuntos do produto cartesiano.

No produto cartesiano A x B, o primeiro conjunto sempre é representado no eixo horizontal e o segundo conjunto sempre é representado no eixo vertical. O par ordenado (a,b) representa um ponto P, onde o valor de a é representado no eixo horizontal que é chamado de abscissa de P e, o valor de b sempre é encontrado no eixo vertical que é chamado de ordenada de P.

O sistema de coordenadas cartesianas divide o plano em quatro partes. Cada uma delas é chamada Quadrante, que são ordenados do 1.º ao 4.º sempre no sentido anti-horário.



Exercícios

1. Represente no sistema cartesiano, os pontos abaixo:

a) A(2,30; B(3,2); C(0,5); D(-2,-3); E(-4,-4); F(0,5); G(1,-4); H(0,-3);I(-2,0)

2. Dados os conjuntos A = {1,2,3} e B = {4,5,6}, faça o que se pede:

a) Represente com pares ordenados a relação AxB.
b) Represente a relação AxB, geometricamente.
c) Verifique se BxA tem a mesma representação.

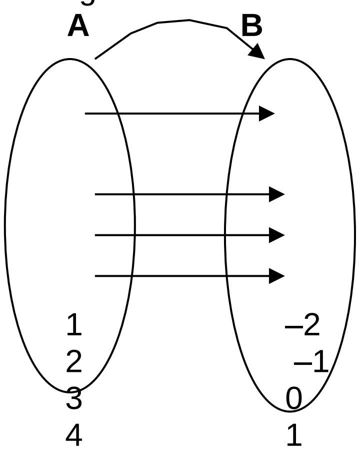
2. RELAÇÕES: -

Dados dois conjuntos **A** e **B**, chamamos de ***Relação de A em B,*** a qualquer subconjunto de ***A x B.*** Esta relação pode ser escrita no diagrama de flechas, por pares ordenados ou por tabela.

Notação:- A relação **R** de **A** em **B** é notada por **R: A →B.**

Dados os conjuntos **A = {1, 2, 3, 4}** e **B = {-2, -1, 0, 1}**, a relação **R** é dada por: y = x – 3, com x∈ A e y ∈ B.

Diagrama de Flechas



Tabela

x	X - 3	Y
1	**1 – 3**	**-2**
2	**2 – 3**	**-1**
3	**3 – 3**	**0**
4	**4 – 3**	**1**

2

Pares Ordenados

R = {(1,-2);(2,-1);(3,0);(4,1)}

Exercícios

1. Dados A = {-2, -1, 0, 1} e B = {-1, 0, 1, 2, 3, 4}, determine as relações de A em B, e represente os pontos no sistema cartesiano.

R_1= {(x,y) ∈ AxB | y = x + 1}

$R_2 = \{(x,y) \in AxB \mid y = x - 2\}$

$R_3 = \{(x,y) \in AxB \mid y = 5 - x\}$

$R_4 = \{(x,y) \in AxB \mid y = x^2\}$

FUNÇÃO

1 - Definição:

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se função (ou aplicação) de A em B, representada por **f: A → B; y = f(x)**, a qualquer relação binária que associa a cada elemento de A, um único elemento de B.

Portanto, para que uma **relação de A em B** seja uma função, exige-se que a cada $x \in A$ esteja associado um único $y \in B$, podendo, entretanto existir $y \in B$ que não esteja associado a nenhum elemento pertencente a A.

Obs. na notação **y = f(x),** entendemos que y é imagem de x pela função f, ou seja: y está associado a x através da função f.

Ex. $f(x) = 4x + 3$; então:
$f(2) = 4.2 + 3 = 11$ e, portanto, 11é imagem de 2 pela função f.
$f(5) = 4.5 + 3 = 23$, portanto 23 é imagem de 5 pela função f , etc.

Para definir uma **função**, necessitamos de dois conjuntos (Domínio e Contradomínio) e de **uma fórmula ou uma lei** que relacione cada elemento do domínio a um e somente um elemento do contradomínio.

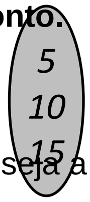
DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM

Quando $D(f) \subset R$ e $CD(f) \subset R$, sendo R o conjunto dos números reais, dizemos que a função f é uma Função real de variável real . Na prática, costumamos considerar uma função real de variável real como sendo apenas a lei $y = f(x)$ que a define, sendo o conjunto dos valores possíveis para x, chamado de **domínio** e o conjunto dos valores possíveis para y, chamado de **conjunto imagem** da função. Assim, por exemplo, para a função definida por $y = 1/x$, temos que o seu domínio é $D(f) = R^*$, ou seja, o conjunto dos reais diferentes de zero (lembre-se que não existe divisão por zero), e o seu conjunto imagem é também R^*, já que se $y = 1/x$, então $x = 1/y$ e portanto y também não pode ser zero.

Dada uma função **f: A → B definida por y = f(x)**, podemos representar os pares ordenados (x, y) ∈ f onde x ∈ A e y ∈ B, num sistema de coordenadas cartesianas.

O gráfico obtido será o gráfico da função f. Assim, por exemplo, sendo dado o gráfico cartesiano de uma função f, podemos dizer que:

- **A projeção da curva sobre o eixo dos x nos dá o domínio da função.**
- **A projeção da curva sobre o eixo dos y nos dá o conjunto imagem da função.**
- **Toda reta vertical que passa por um ponto do domínio da função, intercepta o gráfico da função em no máximo um ponto.**

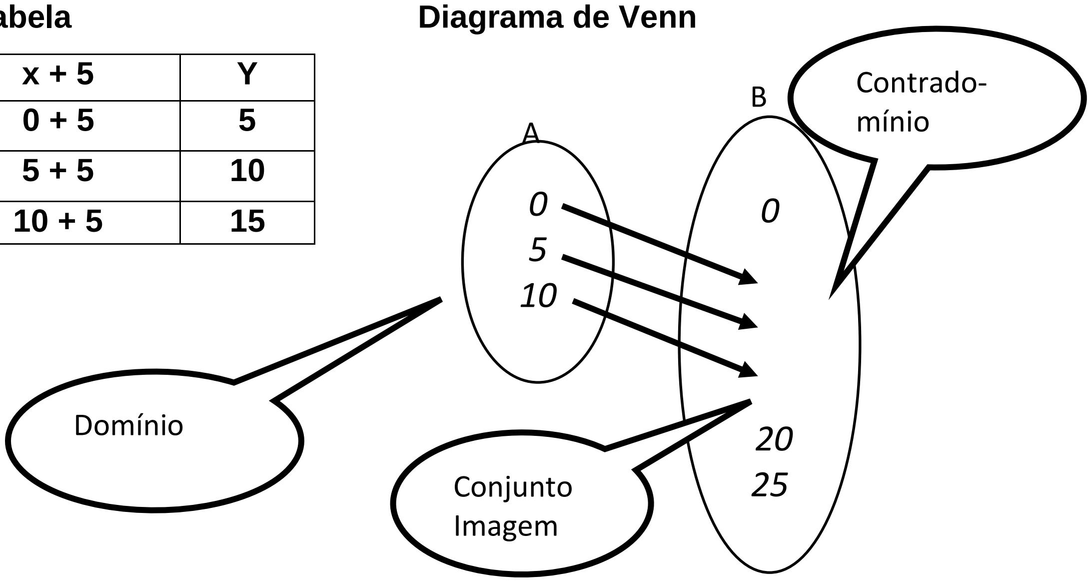


Exemplo:

Dados os conjuntos A = {0, 5, 10} e B = {0, 5, 10, 15, 20, 25}, seja a relação de A em B expressa pela lei y = x + 5, com x □ A e y □ B.

Tabela **Diagrama de Venn**

x	x + 5	Y
0	0 + 5	5
5	5 + 5	10
10	10 + 5	15



ESTUDO DO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Quando definimos uma função, o domínio D, que é o conjunto de todos os valores possíveis da variável independente x, pode ser dado explícita ou implicitamente.

Assim:

- Se for dado f(x) = 2x – 5, sem explicitar o domínio D, está implícito que x pode assumir qualquer número real.

- Se for dado f(x) = 2x – 5, com $0 \leq x \leq 10$, está explicito que o domínio D, está implícito que o domínio da função dada consiste de todos os números reais entre 1 e 10, incluindo-os.

- Se for dado apenas $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$, sem explicitar o domínio D, está implícito

que x pode ser qualquer número real, com exceção de 2, pois se x = 2 $\Rightarrow$ x – 2 = 0 o que não é definido.

- Se for dado apenas $f(x)=\sqrt{x-2}$, sem explicitar o domínio D, está implícito

que (x – 2) pode ser qualquer número real não negativo, ou seja, $x \geq 2$.
Logo:
Quando o domínio de uma função não está explícito, devemos considerar para este domínio todos os valores reais de x que tornam possíveis em IR as operações indicadas na fórmula matemática que define a função.

Exercícios

1. Seja g uma relação G: A→B definida por g(x) = x²–4x+3, sendo A={0,1,2,3} e B={0,1,2,3,4,5}. Faça o diagrama de g e verifique se g é uma função de A em B. Em caso afirmativo, escreva o conjunto imagem.

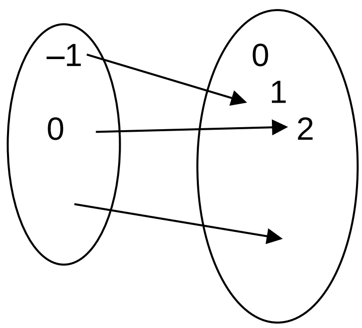
2. Determine o conjunto imagem da função f: {–2, 0, $\sqrt{2}$} → *IR* definida por f(x)=x² + 3.

3. Dados os conjuntos A = {–2,–1,0,1} e B={–3,–2,–1,0,1,2,3,4}, determine:
   a) O conjunto imagem da função f: A →B definida por f(x) = x².
   b) O conjunto imagem da função f: A →B definida por f(x) = 2x²+2.
   c) O conjunto imagem da função f: A →B definida por f(x) = x² – 1.

4. Dada a função real definida por f(x) = 2x–5, calcule o valor de x para que se tenha:
   a) f(x) = 0
   b) f(x) = 1
   c) f(x) = ½

5. Dada a função real definida por f(x) = x² – 5x + 6 calcule o valor de x para que se tenha:
   a) f(x) = 0
   b) f(x) = 6

6. Considerando o diagrama seguinte, que representa uma função de A em B, determine o que se pede:



2 3

4

a) D(f) =
b) f(–1) =
c) f(0) =
d) f(2) =
e) Im(f) =
f) CD(f) =
g) A lei de associação.

7. Determinar os valores de x para os quais a função $f(x)=\dfrac{x}{x-5}$ é definida.

8. Determinar o domínio da função $f(x)=\dfrac{5x+3}{x^2-16}$.

9. Determinar o domínio da função $f(x)=\sqrt{5-3x}$.

10. Determinar o domínio da função $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-6}}$.

11. Determinar o domínio da função $f(x)=\sqrt{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

12. Construir no plano cartesiano o gráfico da função f: IR→IR defina por $f(x)=\begin{cases} x, se\ x \geq 2 \\ 2, se\ \ 0<x<2 \\ 2-x,\ se\ x \leq 2 \end{cases}$ e escreva o domínio da função.

13. Construa num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais o gráfico:
a) De f(x) = x^2 +3.
b) De f(x) = 2^x.
Nos dois exercícios escreva o domínio e o conjunto imagem da função.

14. Construa num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais o gráfico: $f(x)=\begin{cases} x+1,\ se\ x \geq 1 \\ 2,\ se\ x<1 \end{cases}$, escreva o domínio e o conjunto imagem da função.

15. No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, construa o gráfico das funções abaixo para D(f) = [-2, 2].
a) f(x) = 4x – 1

b) f(x) = 3x

2 - TIPOS DE FUNÇÕES

2.1 – Função sobrejetora: é aquela cujo conjunto imagem é igual ao contradomínio.
2.2 - Função injetora : uma função y = f(x) é injetora quando elementos distintos do seu domínio , possuem imagens distintas , isto é :
$\mathbf{x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)}$.
2.3 - Função bijetora: uma função é dita bijetora , quando é ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.

3 - RELAÇÕES ENTRE O NÚMERO DE ELEMENTOS DO DOMÍNIO E DO CONTRADOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função de A em B; Sendo n(A) o número de elementos do conjunto A e n(B) o número de elementos do conjunto B , podemos concluir que:

a) Função injetora: $n(A) \neq n(B)$ e $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.
b) Função sobrejetora: n(A) = n(B).
c) Função bijetora: n(A) = n(B).

4 - PARIDADE DAS FUNÇÕES

4.1 - Função par: a função **y = f(x)** é par quando □ **f(-x) = f(x)**. Portanto, numa função par, elementos simétricos possuem a mesma imagem. Uma conseqüência desse fato é que os gráficos cartesianos das funções pares são curvas simétricas em relação ao eixo dos y ou eixo das ordenadas.

4.2 - Função ímpar: a função **y = f(x)** é ímpar , quando, **f(-x) = - f (x)**. Portanto, numa função ímpar, elementos simétricos possuem imagens simétricas. Uma conseqüência desse fato é que os gráficos cartesianos das funções ímpares são curvas simétricas em relação ao ponto (0,0), origem do sistema de eixos cartesianos.

Nota: se uma função $y = f(x)$ não é par nem ímpar, dizemos que ela não possui paridade.

5 - FUNÇÃO INVERSA

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, se f é bijetora, então se define a função inversa f^{-1} como sendo a função de B em A , tal que $f^{-1}(y) = x$. É óbvio então que:

a) Para obter a função inversa, basta permutar as variáveis x e y.

b) O domínio de f^{-1} é igual ao conjunto imagem de f.

c) O conjunto imagem de f^{-1} é igual ao domínio de f.

d) Os gráficos de f e de f^{-1} são curvas simétricas em relação à reta $y = x$, ou seja, à bissetriz do primeiro quadrante.

6 - FUNÇÃO COMPOSTA

Chama-se função composta (ou função de função) à função que se obtém, substituindo-se a variável independente x, por uma função.

Simbologia: **$fog(x) = f(g(x))$ ou**
$gof(x) = g(f(x))$

Obs. Atente para o fato de que $fog \neq gof$ (a operação "composição de funções" não é comutativa, isto é, o resultado depende da ordem de colocação das funções).

Exercícios resolvidos:

1. Sendo $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 3x$, calcular $g(f(x))$.

Resolução:
$g(f(x)) = g(x^2 - 2) = 3.(x^2 - 2) = 3x^2 - 6$.

2. Sendo $f(x) = x^2 + 2x - 3$ e $g(x) = 5x$, calcular fog.

Resolução:
$fog = f(g(x)) = f(5x) = (5x)^2 + 2.(5x) - 3 =$
$= 25x^2 + 10x - 3$.

3. Sendo $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = x + 1$, calcule $f(g(2))$.

Resolução:

$f(g(x)) = (x + 1)^2 + 3.(x + 1) = x^2 + 2x + 1 + 3x + 3 =$

$= x^2 + 5x + 4 \therefore$ *logo,*

$f(g(2)) = 2^2 + 5.2 + 4 = 4 + 10 + 4 = 18.$

Ou,

$g(2) = 2 + 1 = 3$

$f(3) = 3^2 + 3.3 = 18$

Exercícios

1. Sendo $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = x + 3$ e $h(x) = 2x + 1$, determine:

a) fog
b) gof
c) foh
d) goh
e) hof
f) fogoh
g) gohof

2. Dados $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = 2x – 3$, calcule x para que se tenha:

a) fog (x) = 0
b) gof (x) = 1

3. Dados $g(x) = 4x$ e gof $(x) = 4x + 12$, calcule f(x).

7 – FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

a) FUNÇÃO CRESCENTE

Seja a função f: IR → IR definida por $f(x) = x + 2$.

Vamos considerar dois valores para x_1 e x_2, tais que $x_2 > x_1$, como por exemplo, -2 e 3 e calcular:

$f(-2) = -2 + 2 = 0$

$f(3) = 3 + 2 = 5$

Observe que $x_2 > x_1$ e que $f(x_2) > f(x_1)$

Neste caso, dizemos que a função f é crescente.

Então:

> Uma função y = f(x) é **crescente** num conjunto A se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto A, com $x_2 > x_1$ e $f(x_2) > f(x_1)$.
>
> Em outras palavras, na medida em que se aumenta o valor de x, se também aumentar o valor de y, a função é crescente.

b) FUNÇÃO DECRESCENTE

Seja a função f: IR → IR definida por $f(x) = 2 – x$.
Vamos considerar dois valores para x_1 e x_2, tais que $x_2 > x_1$, como por exemplo, -2 e 3 e calcular:

$f(-2) = 2 – (- 2) = 2 + 2 = 4$

$f(3) = 2 – (3) = 2 – 3 = - 1$

Observe que $x_2 > x_1$ e que $f(x_2) < f(x_1)$.
Neste caso, dizemos que a função f é decrescente.

Então:

Uma função y = f(x) é **decrescente** num conjunto A se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto A, com $x_2 > x_1$ e $f(x_2) < f(x_1)$.

Em outras palavras, na medida em que se aumenta o valor de x se o valor de y diminuir, a função é decrescente.

8 – TIPOS PARTICULARES DE FUNÇÕES

FUNÇÃO CONSTANTE

Uma função é dita constante quando é do tipo **f(x) = k** , onde k não depende de x .
Exemplos:

a) $f(x) = 5$
b) $f(x) = -3$

Obs. o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo dos x.

FUNÇÃO DO 1º GRAU

Uma função é dita do 1º grau , quando é do tipo **y = ax + b** , onde $a \neq 0$.

Exemplos:

a) $f(x) = 3x + 12$ (a = 3 ; b = 12)
b) $f(x) = -3x + 1$ (a = -3; b = 1).

<u>Propriedades da função do 1º grau</u> :

1) O gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta .
2) Na função f(x) = ax + b , se b = 0 , f é dita <u>linear</u> e se b $\neq$ 0 f é dita <u>afim.</u>.
3) O gráfico intercepta o eixo dos x na raiz da equação f(x) = 0 .
4) O gráfico intercepta o eixo dos y no ponto (0,) , onde <u>b</u> é chamado coeficiente linear .
5) O valor <u>a</u> é chamado coeficiente angular e dá a inclinação da reta .
6) Se a $>$ 0 , então f é crescente .
7) Se a $<$ 0 , então f é decrescente .
8) Quando a função é linear (f(x) = ax), o gráfico é uma reta que sempre passa na origem.

Exercícios

1. Dadas as funções abaixo, determine:

a) O zero ou raiz da função.
b) A variação da função.
c) O gráfico da função.
d) O estudo do sinal da função.

1. *f(x) = 2x –1*
2. *f(x) = 2 – x*
3. *f(x) = 3x – 6*
4. *f(x)* = $\frac{3-x}{4}$

FUNÇÃO DO 2º GRAU

Uma função é dita do 2º grau quando é do tipo **f(x) = ax² + bx + c**, com a$\neq$ 0.

Exemplos:

a) f(x) = x^2 - 2x + 1 (a = 1 , b = -2 , c = 1) ;
b) y = - x^2 (a = -1 , b = 0 , c = 0)

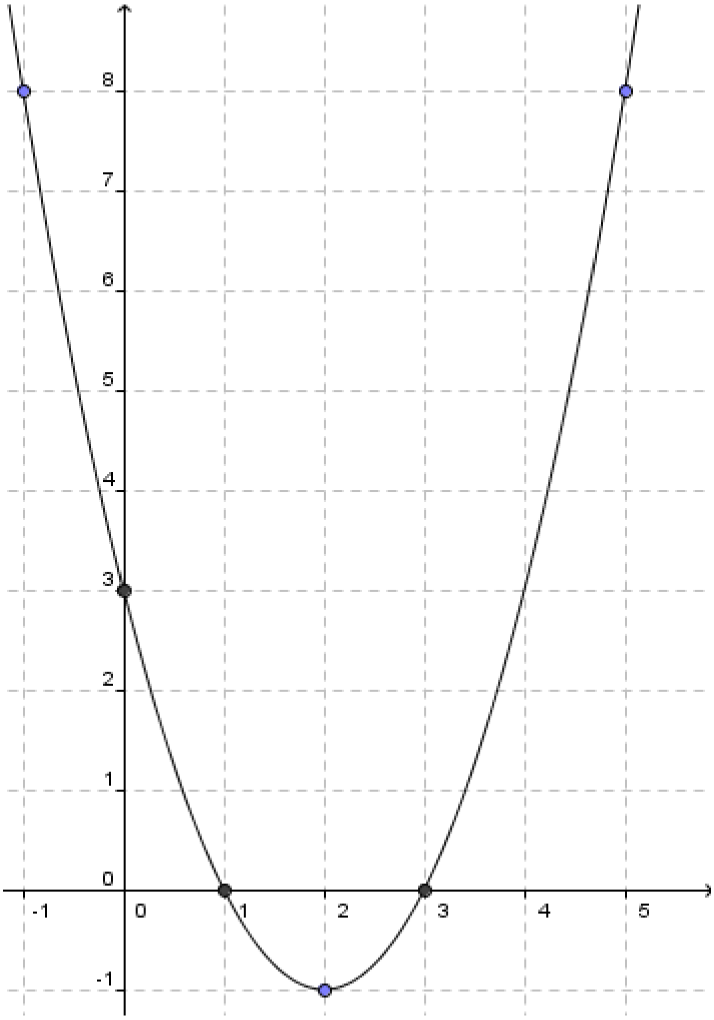
O Gráfico da função do 2º grau

y = ax² + bx + c, é sempre uma parábola de eixo vertical.

Exemplo;

Construir o gráfico da função f(x) = x^2 - 4x + 3.

y



Propriedades do gráfico de **$y = ax^2 + bx + c$** :

a) Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima, admite, então, um ponto de mínimo para y .
b) Se $a < 0$ a parábola tem concavidade para baixo, admite, então, um ponto de máximo para y.
c) O vértice da parábola é o ponto $V(x_v, y_v)$ onde $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$,

   onde
   $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

d) A parábola intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissas x' e x'', que são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0.$

e) A parábola intercepta o eixo dos y no ponto (0, c).

f) o eixo de simetria da parábola é uma reta vertical de equação **x = - b/2a.**

g) **y_{max} =** $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, **(a < 0)**

h) **y_{min} =** $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, **(a > 0)**

i) **Im(f) = { y $\in$ R | y $\geq$ y_v } (a > 0)**

j) **Im(f) = { y □ R | y $\leq$ - y_v } (a < 0)**

k) Forma fatorada : sendo x_1 e x_2 as raízes da de f(x) = ax^2 + bx + c , então ela pode ser escrita na forma fatorada a seguir :
y = a(x - x_1).(x - x_2)

Exercícios Resolvidos e Propostos

Resolvidos
Dar o domínio das funções

1) f(x) = 5x² - 4
Resolução:-
D_f = IR, pois todos os valores reais realizam a operação.

2) $f(x) = \frac{4x-3}{x-7}$
Resolução:
x - 7 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ x $\neq$ 7
D_f = {x$\in$IR | x $\neq$ 7} $\Rightarrow$ pois a função é definida por um quociente e para que ele exista o denominador deverá ser diferente de zero.

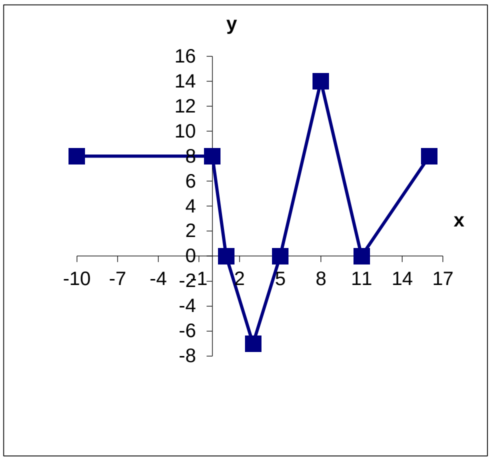
Exercícios Propostos

Dar o domínio das seguintes funções

1. $f(x) = 3x - 2$
2. f(x) = $\sqrt{5x-3}$
3. f(x) = $\frac{\sqrt{7x+2}}{x-5}$
4. f(x) = $\sqrt{4x-1} + \sqrt{x+5}$
5. f(x) = $\frac{\sqrt{x+25}}{\sqrt{-2x+5}}$
6. Sendo f: A $\rightarrow$ B,

a. A = {-2,-1,0,1},
b. B={-11,-8,-5,-4,-2,0,4,10,19,20}
c. sendo f(x) = 3x - 5, obter seu conjunto imagem.

7. Dado o gráfico da função f.



Obter:
a) D(f) =
b) Im(f)=
c) Raízes
d) Onde a função corta o eixo y
e) O máximo da função
f) O mínimo da função
g) f(-3)
h) f(8)
i) f(-10)
j) f(16)

Exercícios Fixação

Função Constante

Esboçar o gráfico e dar a imagem das seguintes funções:
1) f(x) = 5, f: IR $\rightarrow$ IR
2) f(x) = -4, f: IR $\rightarrow$ IR

Função do 1º. Grau
Esboçar o gráfico das funções abaixo
1) f(x) = 3x - 15, f: IR$\rightarrow$IR

2) $f(x) = \begin{cases} 3 \text{ se } x > 3 \\ x \text{ se } 0 \leq x \leq 3 \\ -2x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

3) Sendo f(x) = ax + b, f(2) = 7 e
f(0) = 6, calcular f(4) + 5 f(3) + 9 f(8).

4) Estudar o sinal das funções
a) f(x) = 7x - 4
b) f(x) = -3x + 21

5) Resolver em IR as inequações

a) $7x - 2 \leq 0$
b) $\frac{4x+5}{3} > \frac{1}{3} + \frac{x+3}{2}$

Função do 2º. Grau
Dadas as funções abaixo, com
f: IR→IR, determine:-
a) As raízes da função (zeros)
b) O gráfico
c) O vértice da parábola
d) O conjunto Imagem da função
e) O Domínio da função
f) A variação da função
g) O valor máximo ou mínimo da função
h) O estudo do sinal da função

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
2) $f(x) = - x^2 + 6x - 8$
3) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
4) $f(x) = - x^2 + 6x - 9$
5) $f(x) = x^2 - x + 2$
6) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

Exercícios Revisão

Função do 1.º Grau.

1. O custo para a produção de uma unidade de certo produto é R$ 50,00. Escreva a função custo variável desse produto e o custo para a produção de 2.000 unidades.

2. Um vendedor de livros tem propostas de duas editoras: a editora A para um salário fixo de R$ 1000,00 e comissão de R$ 20,00 por enciclopédia vendida; a editora B oferece salário fixo de R$ 1200,00 e comissão de R$ 15,00 por enciclopédia vendida. Sendo $S_1(x)$ e $S_2(x)$ as funções que representam os salários das editoras A e B, respectivamente, determine:

a) As expressões de $S_1(x)$ e $S_2(x)$;
b) Os gráficos dessas funções no mesmo sistema cartesiano;
c) Qual empresa você recomendaria para o vendedor trabalhar? Porque?

3. Um investidor dispõe de R$ 200.000,00 para comprar ações das empresas A e B. Cada lote de ações da empresa A custa R$ 2.000,00 e da empresa B R$ 2.500,00. Representando por x e y respectivamente o n.º de lotes que se pode adquirir, pergunta-se:

a) A função linear $y = f(x)$ que relaciona as quantidades de lotes de ações;
b) O gráfico da função;
c) As quantidades máximas de cada lote que se pode adquirir;
d) Comprando 40 lotes de ações de A, quanto pode adquirir de B?

Função do 2.º Grau

1. Uma indústria metalúrgica produz 2 tipos de parafusos de quantidades x e y. A curva de transformação é $y = -x^2 - 2x + 24$. Determinar:

a) O gráfico da curva;
b) As quantidades máximas que podem ser obtidas;
c) As quantidades para atender uma demanda do tipo y = 8x.

2. Dois negociantes empregam seus capitais em ações diferentes. A 1.ª ação teve seu valor V variando segundo a função $V_1 = \frac{t}{2} - t + 1$, onde t é o tampo em meses. A 2.ª variou segundo a função $V_2 = t + 1$. Pede-se:

a) Determinar em que época as duas ações tinham valores iguais;
b) O gráfico das duas funções no mesmo sistema de eixos;
c) O valor de cada ação no lançamento, depois de 1 mês e depois de 6 meses.

EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

Exponenciais

POTENCIAÇÃO

$$\begin{cases} a^n = \underbrace{a.a.a.a. \ldots\ldots\ldots a}_{n\ fatores,\ n \in IN} (n \geq 1) \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} (a \neq 0), n \in IN^* \end{cases}$$

PROPRIEDADES

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$
2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$
3) $(ab)^m = a^m . b^m$
4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m} \ (b \neq 0)$
5) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a \geq 0, n \in IN^*$
6) $\left((a)^m\right)^n = a^{m.n}$
7) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

EXERCÍCIO BÁSICO

Calcular:

a) $5^0 =$
b) $3^{-2} =$
c) $7^1 =$
d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} =$
e) $\left(3^2\right)^3 =$
f) $4^2 . 4^3 =$
g) $\dfrac{\left(a^5.b^4\right)^3}{\left(a.b^4\right)^2} =$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Podemos transformar equações exponenciais, operando com as propriedades da potenciação, conforme veremos abaixo:

1. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $3^x = \frac{1}{729}$

b) $4^x = 0{,}125$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2{,}25$

d) $5^{2x^2 - 3x - 2} = 1$

e) $8^{3x} = \sqrt[3]{32^x} : 4^{x-1}$

f) $\frac{4^x + 4}{5} = 2^x$

g) $5^{x+3} + 5^{x+2} - 5^{x-1} = 3745$

h) $2^{2x} - 5.\ 2^x + 4 = 0$

i) $3^{x+2} + \frac{9}{3^x} = 18$

Exercícios Fixação

---

1. Determine o valor de x em cada uma das equações:

a) $3^{x-1} + 3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^x = 306$

b) $2^{2x} + 2^{x+1} = 80$

c) $4^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0$

d) $3^{2x+1} - 10.3^x + 3 = 0$

e) $7^x + 7^{x-1} = 8^x$

f) $5^x - 75.5^{-x} = 22$

g) $\sqrt{8^{x-1}} . \sqrt[x+1]{4^{2x-3}} = \sqrt[6]{2^{5x+3}}$

h) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$

i) $2^{2x-3} - 3.2^{x-1} + 4 = 0$

j) $2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14$

k) $4^x - 6.2^x + 8 = 0$

l) $4^{x+1} - 9.2^x + 2 = 0$

m) $\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$

n) $\dfrac{4^x + 4}{5} = 2^x$

o) $4^x + 6^x = 2.9^x$

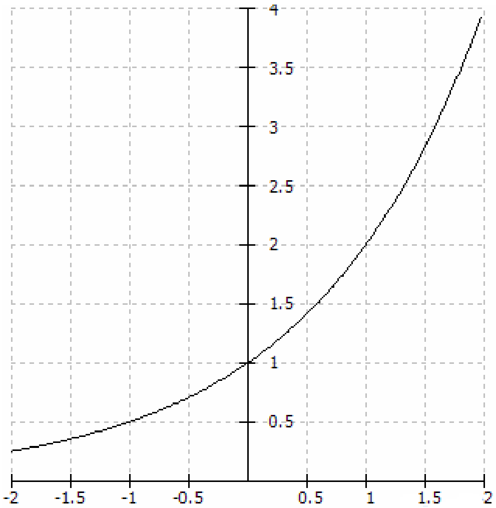
FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere a expressão y = a^x, sendo a > 0 e a $\neq$ 1. Atribuindo a x valores reais, podemos obter pares ordenados, portanto, podemos definir como função exponencial de base a função que a cada x $\in$ IR associa a^x $\in$ IR, sendo $a \in IR_+^*$.

$$f : IR \to IR$$
$$x \to y = f(x) = a^x, a \in IR_+^* \ e \ a \neq 1$$

Gráfico da função exponencial:
Construa o gráfico das funções f(x) = 2^x e também de f(x) = $(1/2)^x$.

x	y
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4



Verificamos no gráfico acima que;

- Como a > 0 a função é crescente.
- A assíntota[1]coincide com o eixo Ox.
- A imagem a função é igual aos reais positivos significativos.

Agora construa no seu caderno o gráfico de f(x) = $(1/2)^x$ e verifique os pontos críticos.

FUNÇÃO EXPONENCIAL GERAL

A definição de função exponencial geral é dada por:

[1] Reta tal que a distância de um ponto de uma curva a essa reta tende para zero quando o ponto se afasta ao infinito sobre a curva. // Assíntota de uma superfície, reta que encontra a superfície em dois pontos levados ao infinito. Em outras palavras: Uma assíntota é uma reta imaginária de uma função em que os pontos do gráfico dessa função aproximam-se muito mas nunca, nunca a tocam.

$$\boxed{y = c + b.a^{k.x}, (a > 0;\ a \neq 1, b \neq 0\ e\ k \neq 0}$$

Onde,
y é a variável dependente;
c é a assíntota;
b um número real diferente de zero;
a a base da potência;
k um fator multiplicativo diferente de zero e,
x a variável independente.

Variação:

$$a^k > 1\ e \begin{cases} b > 0 \Rightarrow Crescente \\ b < 0 \Rightarrow decrescente \end{cases}$$

$$0 < a^k < 1\ e \begin{cases} b > 0 \Rightarrow decrescente \\ b < 0 \Rightarrow crescente \end{cases}$$

Exemplo:
Construir o gráfico de $y = -4 + 2.2^{-0,5x}$ e discuta os pontos críticos.
Resposta:
Para construir este gráfico devemos:
a) Verificar o valor da assíntota horizontal.
Como $c = -4 \Rightarrow$ assíntota horizontal está localizada no ponto (0,–4)

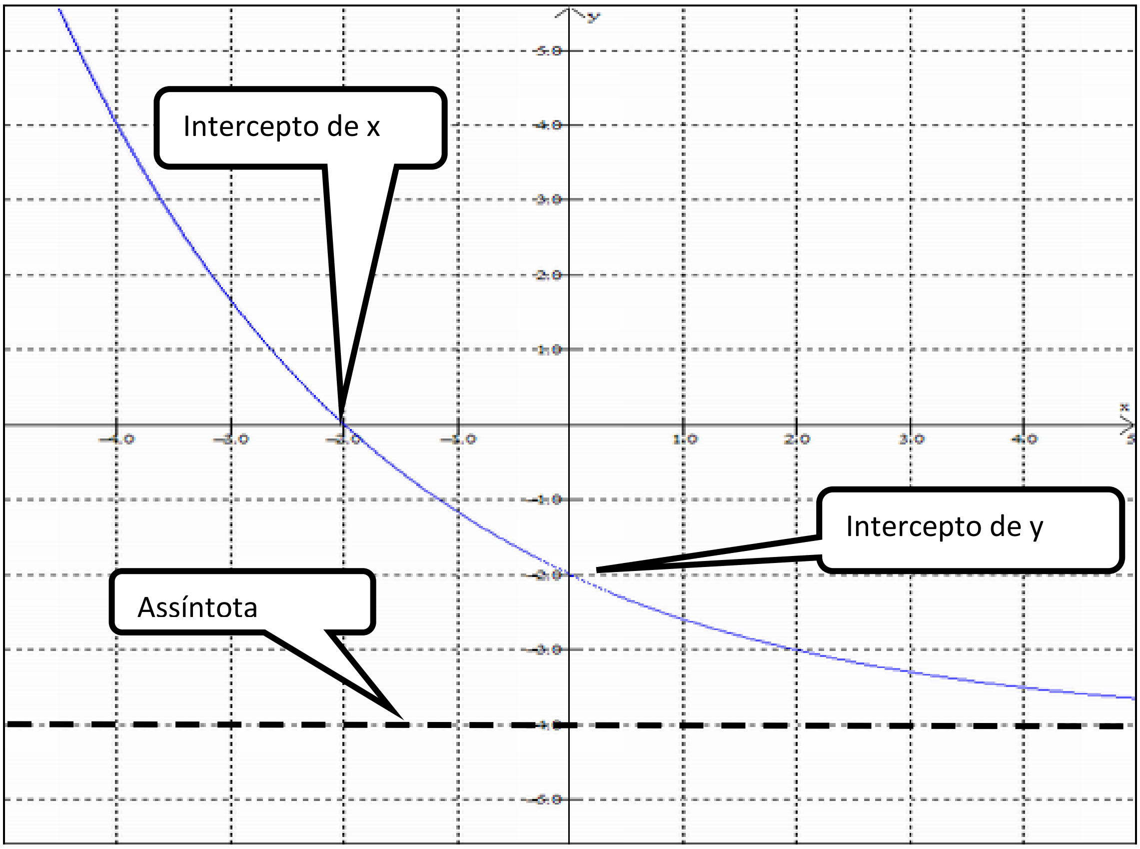
b) A variação
$a^K = 2^{-0,5} \cong 0,7071...$
então:

$$0 < a^k < 1\ e \{ b > 0 \Rightarrow decrescente$$

c) Calcular os interceptos de x e y.

Intercepto de x $\Rightarrow$ y = 0.	Intercepto de y $\Rightarrow$ x = 0.
Então:	Então:
$-4 + 2.2^{-05x} = 0$	$y = -4 + 2.2^{-05x}$
$2.2^{-05x} = 2$	$y = -4 + 2.2^{-05.0}$
$2^{-05x} = 2$	$y = -4 + 2.2^0$
$-0,5x = 1$	$y = -4 + 2.1$
$X = -2$	$y = -4 + 2$
(–2,0)	$y = -2$
	(0,–2)

d) Construir o gráfico.



Exercícios Fixação

1. Construir os gráficos abaixo:

   a) $y = -6 + 2.3^{x}$
   b) $C(t) = 6 + 3.2^{x}$
   c) $f(x) = 12 - 4.3^{-0,1x}$

2. Uma pessoa empregou uma quantia equivalente a 10 salários mínimos a uma taxa de 3% ao mês, capitalizados mensalmente. Determinar o montante, em salários mínimos, resultante após um ano.

3. Determine o tempo mínimo necessário para que um capital, empregado à taxa de 5% ao mês, com juros capitalizados mensalmente, dobre de valor.

4. A população de um país cresce a uma taxa de 2% ao ano. Em quanto tempo esse país dobrará sua população?

Logaritmos

Definição

Os logaritmos foram introduzidos no mundo da Matemática no século XVII pelo matemático escocês John Napier e pelo matemático inglês Henry Briggs para a execução de complexos cálculos aritméticos.

Denomina-se logaritmo de um número n na base a ao expoente b que devemos colocar em a para dar o número n com n > 0 e 0 < a $\neq$ 1.

$$\boxed{\log_a n = b \Leftrightarrow a^b = n}$$

Como demonstramos acima, a base de um logaritmo pode ser qualquer número estritamente positiva e diferente de 1, porém, a base mais usada, na prática, é a base 10, por isso são chamados de logaritmos decimais, não menos importante são os logaritmos naturais ou neperianos que são os que têm a base ***e*** (número de Euler, cujo valor é aproximadamente 2,718), são indicados por ***ln(x).***

Exemplos:

$a)\ \log_2 64 = x$

$2^x = 64$

$2^x = 2^6$

$x = 6$

$b)\ \log_2 \sqrt{32} = x$

$2^x = \sqrt{2^5}$

$2^x = 2^{\frac{5}{2}}$

$x = \frac{5}{2}$

Propriedades dos logaritmos

P1 – Logaritmo de um produto

$$\log_n(a.b) = \log_n a + \log_n b$$

P2 – Logaritmo de um quociente

$$\log_n\left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$$

P3 – Logaritmo de uma potência

$$\log_n a^b = b.\log_n a$$

P4 – Mudança de base

$$\log_n a = \frac{\log_m a}{\log_m n}$$

Exercícios de fixação

a) $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$

Resolução

Como é uma soma de dois logaritmos podemos transformar em logaritmo de um produto.

$$\log_2 (x+2).(x-2) = 5$$

$$C.E. \begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = 2^5$$
$$x^2 = 32 + 4$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

Verificação

$$p/x = 6$$
$$x+2>0 \Rightarrow 6+2>0 \Rightarrow 8>0\,(V)$$
$$p/x = -6$$
$$x-2>0 \Rightarrow -6-2>0 \Rightarrow -8>0\,(F)$$

S= [6}

respostas

b) $log_2(x-8) - log_2(x+6) = 3$ .... ϕ

c) $2\,log_7 x = log_7 3x + log_7 6$ 18

d) $log_2(x-1) + 1 = log_2(x+2) + log_2(7-x) - log_2 3$ 4

e) $27.x^{log_3 x} = x^4$ .... 3 e 27

f) $log_2(x+3) + log_2(x-4) = 3$ 5

g) $log_2(x^2 + 2x - 7) - log_2(x-1) = 2$ 3

h) $log_{\sqrt{2}}(2x+1) - log_{\sqrt{2}}(5x+2) = 2$ .... -3/8

i) $log\ (m-9) + 2\,log\ \sqrt{2m-1} = 2$ 13

j) $log_3(x-1) + log_3(2x+1) - log_3(x-3) = 3$ .... 4 e 10

k) $log\ (5^{2-x})^{2+x} + log\ 400 = 4$ .... $\pm\sqrt{2}$

l) $3\,log_8^{\,2}\ x + 3 = log_8 x^{10}$ .... 2 e 512

m) $log_2 x + log_8 x = 8$ 64

n) $log_2 x + log_4 x + log_{16} x = 7$ 16

o) $log_x 3 . log_{3x} 3 = log_{81x} 3$ .... 1/9 e 9

p) $log_3 \sqrt{3x} + log_9(2x-5) = 1$ 3

2. Calcule a soma das raízes da equação $log_2(x^2+2) = log_{0,5}(x^2-2)$.

Resposta: Zero

Função Logaritmica

Denominamos de função logarítmica toda função do tipo $f(x) = c + b.\log_a(mx + n)$, com b ≠ 0, $x > -\frac{n}{m}$; portanto, assíntota vertical (paralela ao eixo 0y) e 0< a ≠1 e c um número real.

Variação da função

$$f(x) = c + b.\log_a(mx + n)$$

$$a > 1 \text{ e } \begin{cases} b > 0 \Rightarrow Crescente \\ b < 0 \Rightarrow decrescente \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \text{ e } \begin{cases} b > 0 \Rightarrow decrescente \\ b < 0 \Rightarrow crescente \end{cases}$$

INTERCEPTOS

Para encontrar os interceptos fazemos:

Intercepto no eixo x ⇒y = 0
Intercepto no eixo y ⇒x = 0

ASSÍNTOTA

Para determinar a assíntota:

$$mx + n = 0$$

$$x = -\frac{n}{m}$$

Assíntota vertical

Exemplo:

Construir o gráfico da função $f(x) = 2 - 2\log_{\frac{1}{3}}(2x - 3)$.

Assíntota:

2x–3 =0

$x=-\dfrac{3}{2} \rightarrow$ assíntota vertical.

Intercepto de x $\rightarrow$ y = 0

$Intercepto\ de\ x \rightarrow y = 0$

$f(x) = 2 - 2\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$

$2 - 2\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) = 0$

$-2\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) = -2$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) = 1$

$$2x - 3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{3}+3}{2} = \frac{10}{6}$$

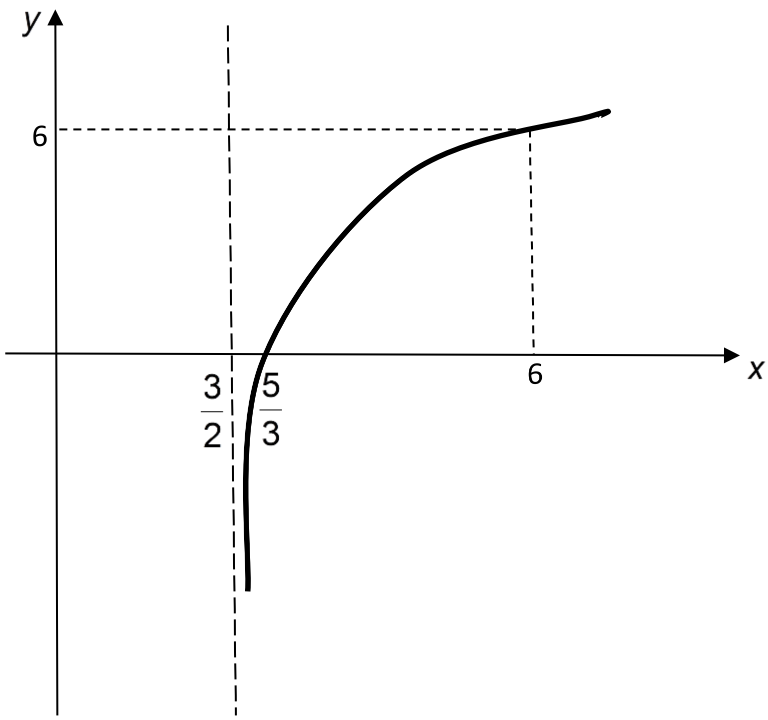
Intercepto de y → x=0

Não existe, pois assíntota é positiva.

Variação:

$$a = \frac{1}{3} \rightarrow 0 < a < 1 \wedge b = -2 \rightarrow b < 0 \Rightarrow função\ crescente$$

Gráfico



Exercícios propostos

1. Esboçar os gráficos de:-

a) $y = 2\log_2(x - 3)$ b) $y = -\log_2(2x + 4)$

2. Calcular por quanto tempo devo aplicar R\$ 10.000,00 para obter R\$ 30.000,00 à taxa de 3% .

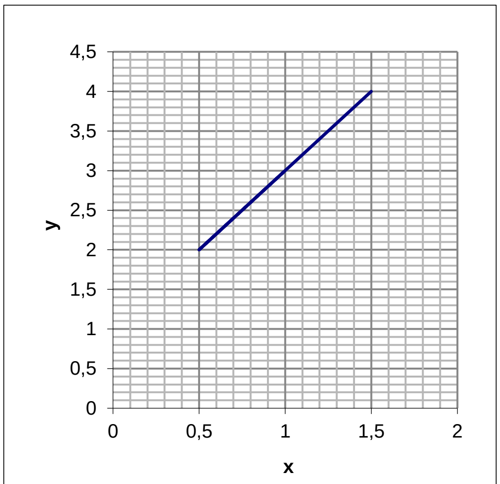
3. A população brasileira cresce à taxa anual de 2,4% a.a. Quanto tempo leva para duplicar a população brasileira, mantida essa taxa?

LIMITES

NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Seja a função f(x) = 2x + 1. Vamos dar valores a **x** que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela sua esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de **y**:

Direita ←		esquerda →	
x	y= 2x+1	x	y= 2x + 1
1,5	4	0,5	2
1,3	3,6	0,7	2,4



1,1	3,2	0,9	2,8
1,05	3,1	0,95	2,9
1,02	3,04	0,98	2,96
1,01	3,02	0,99	2,98

Notamos que à medida que **x** se aproxima de 1, **y** se aproxima de 3, ou seja, quando **x** tende para 1 (x → 1), **y** tende para 3 (y → 3), ou seja:

$$\boxed{\lim_{x \to 1}(2x+1) = 3}$$

Observamos que quando **x** tende para 1, **y** tende para 3 e o limite da função é 3.

Esse é o estudo do comportamento de f(x) quando **x** tende para 1 (x→1). Nem é preciso que **x** assuma o valor 1. Se **f(x)** tende para 3 (f(x) → 3), dizemos que o limite de f(x) quando x → 1 é 3, embora possam ocorrer casos em que para x = 1 0 valor de f(x) não seja 3.

De forma geral, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

Se, quando **x** se aproxima de **a** (x → a, f(x) se aproxima de **b** (f(x) → b).

Seja agora a função f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, x \neq 1 \\ 2, se \;\; x = 1 \end{cases}$

Determine:

a) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} =$

c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$

PROPRIEDADE DOS LIMITES

P1 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Ex. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 3x^3) =$

P2 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Ex. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \pi} (x^3.\cos x) =$

P3 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

Ex. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} =$

P4 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x)^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$

Ex. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 3)^2 =$

P5 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}, n \in \mathbb{N}^* \ e \ f(x) \geq 0. \ (se \ \ f(x) \leq 0, n \ é \ \ impar.)$

Ex. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^3 + x^2 - 1} =$

P6 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [\ln f(x)] = \ln\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right], se \lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$

Ex. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to e} (\ln x^2) =$

P7 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$

Ex.$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \operatorname{sen}(x^2 + 3x)$

P8 $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Ex. $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 + 3x} =$

Exercícios

1. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+3x-4\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

LIMITES LATERAIS

Se **x** se aproxima de **a** através de valores maiores que **a** ou pela sua direita, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x\to a_+} f(x)=b}$$

Esse limite é chamado de *limite lateral à direita* de **a.**

Se **x** se aproxima de **a** através de valores menores que **a** ou pela sua esquerda, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x\to a_-} f(x)=b}$$

Esse limite é chamado de *limite lateral à esquerda de* **a.**

O limite de f(x) para x → a existe se, e somente se, os limites laterais à direita e a esquerda são iguais.

Exercícios

1) f(x) = $\begin{cases} x^2+4x, \ se \ x\geq 1 \\ 6x-1, \ x<1 \end{cases}$

2) Temos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tgx = \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tgx = \end{cases}$$

CONTINUIDADE

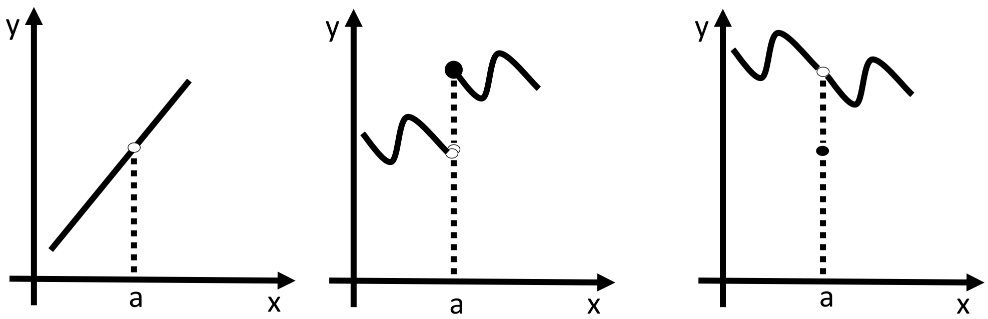
Dizemos que uma função é contínua num ponto **a** do seu domínio se as seguintes condições são satisfeitas:

$\exists f(a)$

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Vamos observar alguns exemplos de descontinuidade:



$\nexists$ f(a) $\quad \nexists \lim\limits_{x \to a} f(x) \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Propriedades das funções contínuas

Se f(x) e g(x) são contínuas em x = a, então:

* f(x) ± g(x) é contínua em **a**;
* f(x) . g(x) é contínua em **a**;
* $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua em **a** (g(a)≠0).

Exercícios

Verificar a continuidade das funções nos pontos indicados:

a) f(x) = x^2 + 1, em x = 1

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, x \neq 0, em\ x = 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

c) f(x) = x^2 + 3x, em x = 2

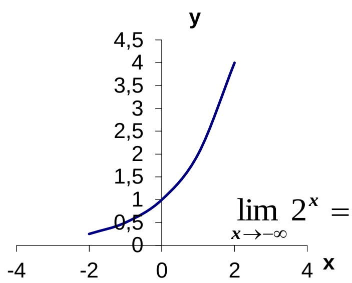
d) f(x) = $\dfrac{x^2+3x}{x+1}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, x \geq 0\ em \\ x - 2,\ x < 0 \end{cases}$

ALGUNS LIMITES ENVOLVENDO INFINITO

Conforme sabemos, a expressão x $\to \infty$ (x tende ao infinito) significa que x assume valores superiores a qualquer número real x $\to -\infty$ (x tende para menos infinito), da mesma forma, indica que x assume valores menores que qualquer número real.

Ex.



$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$

a) $\lim_{x \to \infty} 2^x = \infty$

b)

LIMITE DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL PARA X $\to \pm\infty$

Seja a função polinomial f(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Então:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} = a_n x^n}$$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^2 + x - 3) =$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 4x^2 + 2x + 1) =$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 + x - 1}{x^3 + x^2 + 4} =$

Exercícios de fixação

1. Calcule os limites utilizando as propriedades.

a) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 2x^2 - 4x + 3)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{5 - 3x}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4} \right)^3$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x - 5}{2x^2 - 9x + 2} \right)^2$

g) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x^2 - x + 2}{4x + 3}}$

Respostas: a) 2; b) 4; c) -8/3; d)-12; e) 0; f) 1/8; g) 9/4; h) 2

2. Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 - x^2 + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 6x - 9}{x^3 - 8x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{x^3 - 4x^2 + 8x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 10x + 4}{x^3 - 2x^2}$

Respostas: a) -4/5; b) 21/19; c) 1; d) 11/2

3. Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12}{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 4}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 12x - 4}{2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 12x - 8}$

Respostas: a) ½; b)-1/5; c) 8; d)7/8

BIBLIOGRAFIA

BONORA JR. Dorival, et. Alli, *Matemática, Complementos e aplicações nas áreas de ciências contábeis, administração e economia. Ícone editora – 2.ª edição – 2000.*

GENTIL, N. et alli, *Matemática para o 2.º grau* Editora Ática, SP – 1996.

GUIDORIZI,H.L. *Matemática para Administração.* Rio de Janeiro – LTC S/A- 2002.

IEZZI, G. et al. *Fundamentos de Matemática elementar – vol. 8.*São Paulo: Atual-1993

MATIAS, A.B. et al.*Finanças Corporativas.*São Paulo: Atlas – 2007.

MORETTIN, P.A. et. Al. *Cálculo funções de uma e várias variáveis*. São Paulo: Saraiva – 2003.

MUROLO.A.C. **BONETTO,** G.A. *Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade.* Pioneira Thonson learning – 2004.

PIERRO NETO, Scipione, etti alli. *Matemática Curso Fundamental*. Editora Scipione – SP – 1991.

SILVA, S.Medeiros**,** et al.*Matemática: para cursos de economia, administação, ciências contábeis*. Atlas – SP, 1999.